Математика 12/О\_ДО на 18.04.2020г.

**ТЕМА: «ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»**

**(Теоретическую часть можно распечатать и вставить в тетрадь. Выполнить задания!!!).**

*Приближённое число* есть такое число, которое отличается от точного на погрешность (ошибку), допущенную в соответствии с условиями данной задачи, и заменяет точное число в расчётной формуле. Арифметические действия с приближёнными числами следует производить также приближённо, ограничиваясь той степенью точности, которая необходима для данной задачи.

1.1 АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Точные значения искомых величин будем обозначать буквами *а0, b0, с0*… и т.д. На практике часто получают не точные, а приближённые значения величин, которые будем обозначать *а1, а2, а3,* … и т.д. (индексы – номер измерения).

Если *а0*– точное число, *а* – его приближённое значение, то *а ≈ а0.*

Абсолютная величина разности между точным и приближённым значением числа, т.е. ∆ = *|а – а0*|, называется *истинной абсолютной погрешностью*этого числа.

**Пример:** Найти истинную абсолютную погрешность числа *а0*= 245,2, если *а* = 246.

Р е ш е н и е. Имеем *|а – а0|* = |245,2 - 246| = 0,8.

**Задание:** Найти истинные абсолютные погрешности чисел:

1. *а0= 348; а = 347,289.*3*. а0= 64,28; а = 64,32.*

2*. а0= 14,262; а = 14,261983.*5*. а0= 0,135; а = 0,13512.*

3*. а0= 12487856; а = 12400000.*7*. а0= 3,528; а = 3,5281.*

4*. а0= 854000; а = 853997.*9*. а0= 647398; а = 647500.*

Число Δа будем называть *границей абсолютной погрешности.*Если задана граница абсолютной погрешности Δа, то говорят, что число *а*есть приближённое значение числа *а0* с точностью до Δ*а*, и пишут *а0* = *а*± Δ*а .*

**Пример:** Записать число *а0* = 9,3 ± 0,5 с помощью двойного неравенства.

Р е ш е н и е. 9,3 – 0,5 ≤ *а0* ≤ 9,3 + 0,5; 8,8 ≤ *а0*≤ 9,8.

**Задание.** Записать числа в виде двойного неравенства:

5. *а0 = 347,50;*Δ*а = 0,0047.*12. *а0 = 0,3010;*Δ*а = 0,00005.*

6. *а0 = 7,269;*Δ*а = 0,0004.*14. *а0 = 142170;*Δ*а = 30.*

7. *а0 = 420000;*Δ*а = 500.*16. *а0 = 7,263;*Δ*а = 0,00001.*

8. *а0 = 0,1628;*Δ*а = 0,0002.***18.***а0 = 99,973;*Δ*а = 0,027.*

В математике имеется ряд практических методов для оценки точности вычислений, в том числе и обязательные правила составления таблиц и проведения измерений.

Так, абсолютная погрешность числа, взятого из математической таблицы, не превосходит единицы последнего разряда; при физических измерениях не очень большой точности измерения определяется по наименьшему делению прибора.

1.2. ЗАПИСЬ ПРИБЛИЖЁННЫХ ЧИСЕЛ

**Определение.**Некоторая цифра приближённого числа считается *верной,*если его абсолютная погрешность Δ*а*не превосходит единицы того разряда, в котором стоит эта цифра. В противном случае цифра называется *сомнительной.*

Очевидно, что если какая-либо цифра верна, то и все предшествующие ей цифры также являются верными.

**Пример:** Найти верные и сомнительные цифры числа *а0* = 945,673 ± 0,03.

Р е ш е н и е. Здесь *а =*945,673, Δ*а =*0,03. Цифра 6 представляет собой цифру десятых долей, т.е. единицу этого разряда запишем так: 0,1. Сравним эту единицу с погрешностью числа; так как 0,1 > 0,03, то абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, в котором стоит цифра 6. Следовательно, по определению, цифра 6 – верная. Очевидно, что цифры 9, 4, 5, стоящие перед цифрой 6, также являются верными.

Цифра 7 – это цифра сотых долей, т.е. единицу этого разряда можно записать так: 0,01. Сравним эту единицу с погрешностью числа; поскольку 0,01 < 0,03, абсолютная погрешность числа больше единицы разряда, в котором стоит цифра 7. Следовательно, по определению, цифра 7 – сомнительная. Очевидно, что цифра 3 также является сомнительной.

**Задание:** Определить верные и сомнительные цифры чисел:

9. *а0 = 649 ± 0,04.*

10. *а0 = 14,28 ± 0,03.*

11. *а0* = *1,298 ± 0,003.*

12. *а0* *= 428,735 ± 6.*

13. *а0* = *24,68 ± 0,05.*

14. *а0* = *749,3 ± 5.*

15. *а0* = *1428 ± 0,05.*

16. *а0* = *729,5 ± 1.*

17. *а0* = *4,289 ± 0,2.*

18. *а0* = *679,3 ± 0,06.*

19. *а0* = *428,7 ± 20.*

20. *а0* *= 64,28 ± 5.*

В записи приближённых чисел принято соблюдать следующие правила:

1. *Оставлять в записи приближённого числа только верные цифры.*
2. *Если в десятичной дроби последние верные цифры нули, то их надо выписать.*
3. *Если число содержит в конце нули, не являющиеся верными цифрами, то они должны быть заменены на 10n, где n – число нулей, которое надо заменить.*

**Пример:** Записать правильно число: а) *а*= 0,075 ± 0,000005; б) *а*= 746000000 ± 5000.

Р е ш е н и е. а) Так как погрешность числа не превосходит 0,00001, то число должно быть записано в виде *а*= 0,07500. б) Здесь первой верной цифрой является цифра десятков тысяч, поскольку погрешность числа не превосходит 10000. Значит, число должно быть записано в виде *а =* 74600 · 104.

**Задание:** Записать правильно следующие приближённые числа:

21. *а0 = 0,35;*Δ*а = 0,00005.*

22. *а0 = 163000000;*Δ*а = 500.*

23. *а0 = 765000;*Δ*а = 5.*

24. *а0 = 0,3700;*Δ*а = 0,05.*

25. *а0 = 278000;*Δ*а = 50.*

26. *а0 = 428;*Δ*а = 5.*

27. *а0 = 649,3;*Δ*а = 5.*

28**.***а0 = 172420;*Δ*а = 0,05.*

**Пример:** Указать абсолютную погрешность приближённого числа: а) *а =*2175000;

б) *а =* 173 · 104.

Р е ш е н и е. а) Так как выписаны все нули, то нули разряда сотен, десятков, единиц – верные цифры. Следовательно, абсолютная погрешность числа не превосходит единицы наименьшего разряда, в котором стоят верные цифры, т.е. Δ*а =*1.

б) Согласно правилу III на 104 заменены нули, не являющиеся верными цифрами. Следовательно, первой верной цифрой является цифра 3 в разряде десятков тысяч. Итак, Δ*а =*10000.

**Задание:** Указать абсолютные погрешности следующих приближённых чисел:

29. *а* = 14,5 · 10.

30. *а =* 263 · 104.

31. *а =*748,56.

32. *а =*34,20.

33. *а =*759,00.

34. *а =*64,27.

35. *а =*23,560.

36. *а =*1,0000.

37. *а =*147,3 · 103.

38. *а =*142,3 · 10.

39. *а =*596,2 · 105 .

40.*а =*15,7 · 102.

**Задание:** Записать правильно следующие приближённые числа, учитывая, что **Δ*а =*500**

41. *а*= 15400.

42. *а =*24300.

43. *а =*2600.

44. *а =*4000.

45. *а =*600.

46. *а =*56100.

47. *а =*1700.

48. *а =*41500.

49. *а =*89300.

50. *а =*666400.

51. *а =*759200.

52. *а =*111600.

53. *а =*35200.

54. *а =*74900.

55. *а =*54300.

56. *а =*7500.

57. *а =*1628300.

58. *а =*428600.

*Значащими*цифрами числа называют все его верные цифры, за исключением нулей, стоящих левее первой цифры, отличной от нуля.

Например, число 0,712 содержит три значащие цифры: 7, 1, 2; число 0,0016 – две значащие цифры: 1, 6; число 45,03 – четыре значащие цифры: 4, 5, 0, 3.

1.3. ОКРУГЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ ЧИСЕЛ

Запись приближённых чисел требует их округления.

Чтобы округлить число с точностью до указанного разряда, нужно цифры, стоящие правее указанного разряда, отбросить (в дробной части числа) или заменить нулями (в целой части числа). Если при округлении первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последнюю сохраняемую цифру не изменяют; если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на 1.

**Пример:** Округлить с точностью до 0,01: а) 1,423; б) 3,2387; в) 1,996.

Р е ш е н и е. а) Так как отбрасываемая цифра 3 < 5, то округляем до 1,42; б) так как первая отбрасываемая цифра 8 > 5, то округляем до 3,24 ; в) так как первая отбрасываемая цифра 6 > 5, то округляем до 2,00.

**Задание:** Округлить с точностью до 0,01 следующие числа:

59. 0,428.

60. 2,645.

61. 8,993.

62. 16,452.

63. 81,341.

64. 10,328.

65. 76,645.

66. 62,8428.

67. 15,1613.

68. 17,8975.

69**.**22,1488.

**Задание:** Округлите с точностью до 1 следующие числа:

70. 16,285.

71. 17,349.

72. 34,931.

73. 60,605.

74. 0,785.

75. 2,501.

76. 31,499.

77. 785,501.

78.0,499.

**Задание:** Округлите с точностью до 1000 следующие числа:

79. 1835.

80. 4382.

81. 64975.

82. 10428.

83. 72356.

84. 16765.

85. 4172,035.

86. 6872,73.

87. 1335,42.

1.4. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Допустим, что погрешность какого-либо измерения равна 0,2 см. Если с такой погрешностью измеряли длину тетради, то это большая погрешность, а если измеряли длину комнаты – небольшая. Таким образом, имеет значение не только какова погрешность, но и отношение её к измеряемой величине.

*Относительной погрешностью*приближённого значения числа *а* называется отношение абсолютной погрешности этого числа к числу *а.*

Так как абсолютная погрешность обычно бывает неизвестна, то на практике используют понятие границы относительной погрешности числа.

*Границей относительной погрешности ɛα*приближённого значения *а*называется отношение границы абсолютной погрешности Δ*а*к модулю числа *а*, т.е.

ɛα=  .

Чем меньше граница относительной погрешности, тем выше качество измерения.

**Пример:** Найти границу относительной погрешности числа *а* = 142,5, если Δ*а =*0,05.

Р е ш е н и е. ɛα=  ∙ 100% , ɛα=  ∙ 100% = 0,00034 ∙ 100% = 0,03% .

**Задание:** Определить границы относительных погрешностей следующих чисел:

88. *а=*6,93*;*Δ*а =*0,02.

89.*а=*12,79*;*Δ*а =*2*.*

90. *а=*648,5*;*Δ*а =*0,05.

91.*а=*792,3*;*Δ*а =*0,05.

92. *а=*2,372*;*Δ*а =*0,004.

93. *а=*4,25*;*Δ*а =*0,02.

94. *а=*34,27*;*Δ*а =*0,005.

95**.***а=*1,9345*;*Δ*а =*0,0005.

**Пример:** Найти границу абсолютной погрешности числа *а =*1348, если ɛα = 0,04% .

Р е ш е н и е. Запишем границу относительной погрешности в виде 0,04% = 0,0004. Чтобы найти границу абсолютной погрешности числа *а,*воспользуемся формулой Δ*а =* | *а* | ∙ ɛα, откуда Δ*а =*1348 ∙ 0,0004 = 0,539 ≈ 0,5. Значит, Δ*а =*0,05 и число может быть записано так: *а =* 1348 ± 0,5.

**Задание:** Найти границу абсолютной погрешности следующих чисел:

96. *а =*352,004; ɛα= 0,03% .

97. *а =*71,28; ɛα= 0,005% .

98. *а =*0,649; ɛα= 0,002% .

99. *а =*42,78; ɛα = 3% .

100. *а =*142,5; ɛα= 0,3% .

101**.***а =*740000,0; ɛα= 0,05% .